Fisica I – 2009/2010 – Folha de Actividades para a Aula 16

Questão 1

Um pêndulo simples de comprimento ℓ, é largado em repouso a um ângulo θ_0 com a vertical. a) Assumindo que o seu movimento consequente é harmónico simples, determine (em termos de ℓ, g e θ_0) a sua velocidade para $\theta = 0$; b) Partindo do princípio de conservação de energia mecânica, determine (em termos de ℓ, g e θ_0) a sua velocidade para $\theta = 0$ e mostre que a expressão encontrada em a) é equivalente à de b) se θ_0 for um ângulo pequeno, o que implica $\cos\theta_0 \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2$; c) calcule a diferença entre os resultados de a) e b) para ℓ=1,0 m e θ_0 = 0,20 rad e para ℓ=1,0 m e θ_0 = 1,0 rad e comente; faça g = 10 m/s^2.

Resolução

a) $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ **;** $\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$ **; para as condições iniciais dadas vem**

$\theta = \theta_0 \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad v = \ell \dfrac{d\theta}{dt} = -\ell\omega\theta_0 \sin(\omega t)$ **para** $\theta = 0 \rightarrow \cos(\omega t) = 0$ **e**

$\sin(\omega t) = 1 \quad \Rightarrow \quad v = -\ell\omega\theta_0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \ell g \theta_0^2$

b) Chamando *h* à altura de que o corpo parte ela pode ser dada por $h = \ell - \ell\cos\theta$ **;**

aplicando o princípio de conservação de energia mecânica, vem $\dfrac{1}{2}mv^2 - mgh = 0$

$v^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2g\ell(1 - \cos\theta_0)$ expressão exacta; para pequenos ângulos $\cos\theta_0 \approx 1 - \dfrac{1}{2}\theta_0^2$, então $v^2 = 2g\ell\left[1 - (1 - \dfrac{1}{2}\theta_0^2)\right] \quad \Rightarrow \quad v^2 = g\ell\theta_0^2$ igual à expressão anterior.

c) Para θ_0 = 0,20 rad (θ_0 = 11,5°) $\rightarrow$

$v^2 = \ell g \theta_0^2 = 0{,}400\,\mathrm{m^2/s^2}$ e $v^2 = 2g\ell(1 - \cos\theta_0) = 0{,}398\,\mathrm{m^2/s^2}$

Para θ_0 = 1,0 rad (θ_0 = 57°)

$v^2 = \ell g \theta_0^2 = 1{,}00\,\mathrm{m^2/s^2}$ e $v^2 = 2g\ell(1 - \cos\theta_0) = 0{,}92\,\mathrm{m^2/s^2}$

A primeira situação corresponde a um ângulo pequeno (o afastamento entre os dois resultados é de 5 em mil, em geral abaixo da precisão com que se consegue medir; no segundo caso já há um afastamento de 8% em v^2, de 4% em v.

Questão 2

Um corpo de 2,0 kg desliza preso a uma mola de constante igual a 400 N/m, tendo uma amplitude inicial de 3,0 cm. A sua energia mecânica decresce 1% por período (natural).

Determine: a) a energia mecânica inicial; b) a constante de amortecimento *b*; c) a frequência de oscilação.

Resolução

……………………………………………………………………………………………

a) $E_0 = \frac{1}{2}kA_0^{\,2} = 200 \times (0{,}03)^2 = 0{,}18\,\mathrm{J}$

b) $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k[A_0 \exp(-\frac{b}{2m}t)]^2 = E_0 \exp(-\frac{b}{m}t)$

para $t = T = 2\pi/\omega_0$, vem

$$\frac{E}{E_0} = \exp(-\frac{b}{m} \times \frac{2\pi}{\omega_0}) \quad \Rightarrow \quad \ln(\frac{E}{E_0}) = -\frac{b}{m} \times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad \ln(0{,}99) = -0{,}222 \times b \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}045\,\mathrm{kg/s}$$

c) $\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - (\frac{b}{2m})^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2} = \sqrt{200 - 1{,}265 \times 10^{-4}} = 14\,\mathrm{rad/s}$ (ω_0= 14 rad/s)

……………………………………………………………………………………………